Intégration numérique

1. Description de la méthode

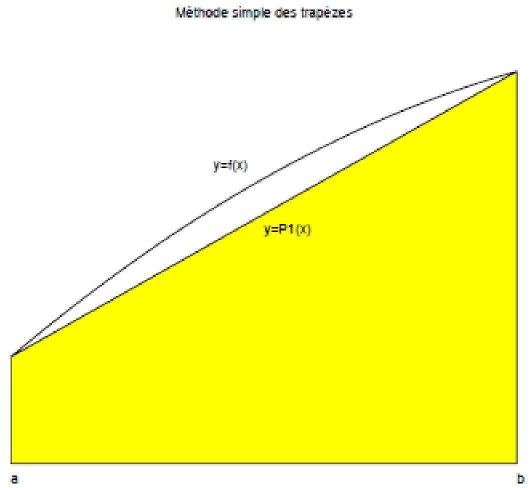
On donne une fonction numérique f définie et intégrable sur $[a, b]$ supposée connue (grâce aux mesures) en $(n + 1)$ points selon le tableau :

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f_0 = f(x_0)$	$f_1 = f(x_1)$	$\cdots$	$f_n = f(x_n)$.

Pour approcher le nombre exact $I = \int_a^b f(t)dt$, l'idée est la suivante :

- on remplace $f(x)$ par son polynôme d'interpolation $P_n(x)$,
- on calcule $I_n = \int_a^b P_n(t)dt$,
- on estime l'erreur $|I - I_n|$.

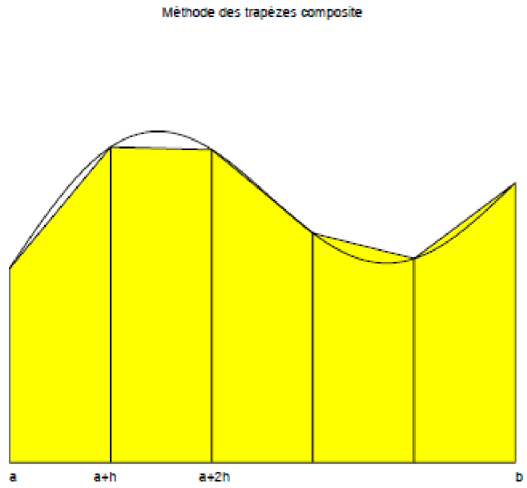
Une telle méthode est appelée souvent méthode de quadrature. On décrira celles qui font appel à l'interpolation polynomiale de degré 0, 1 et 2. On obtient respectivement les formules simples des rectangles, des trapèzes et de Simpson.



En pratique, on subdivise l'intervalle $[a,\ b]$ en plusieurs petits intervalles :

$$[a + (i-1)h,\ a + ih]\,, \quad i = 1, ..., n$$

de longueur $h = (b-a)/n$, auxquels on applique la formule simple puis par sommation, on déduit les formules dites composites.



Le choix de la méthode dépend généralement du type de fonctions qu'on doit intégrer. On peut éventuellement combiner les trois méthodes (rectangles, trapèzes, Simpson) sur des intervalles bien choisis.

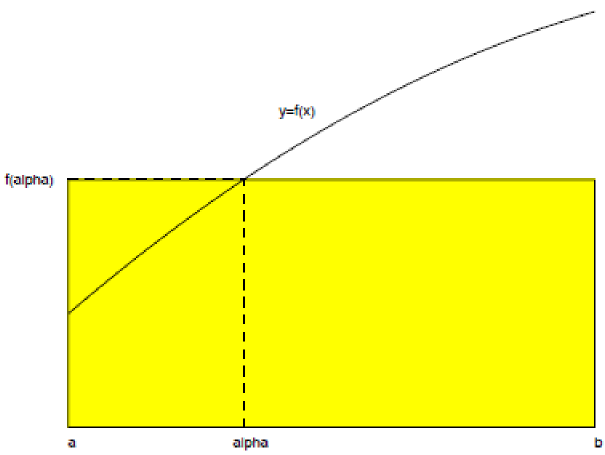
8.2. Méthode des rectangles

8.2.1. *Formules simples*

Supposons que f est connue en un point $\alpha \in [a,b]$. Le polynôme d'interpolation de f est la constante $P_0(x) = f(\alpha)$. Le nombre I est donc approché par

$$I_0 = \int_a^b P_0(t)dt = \int_a^b f(\alpha)dt = (b-a)f(\alpha).$$

Méthode simple des rectangles



Dans le cas particulier où le point α est le milieu de $[a,b]$

$$\alpha = \frac{a+b}{2},$$

on obtient

$$I_0 = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

C'est la formule simple des rectangles point-milieu.

8.2.2. *Formules composites*

On généralise les formules précédentes à $(n+1)$ points équidistants

$$x_0 = a,\ x_1 = a+h, \ldots,\ x_i = a+ih, \ldots, x_n = b,$$

où

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

En appliquant le même principe d'interpolation de degré 0 sur chaque intervalle

$$[x_i, x_{i+1}],$$

on approche $f(x)$ par $P_0(x) = f(\alpha_i)$, où

$$\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}],$$

et on obtient la formule composite des rectangles :

$$I_R = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\alpha_i)dt = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i),$$

qui devient dans le cas des rectangles point-milieu

$$I_M = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)dt = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right).$$

8.3. Méthode des trapèzes

8.3.1. *Formule simple*

On utilise l'interpolation à deux points. Si on suppose connue f aux deux points a et b, on a vu que

$$P_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

Par intégration, on obtient

$$I_1 = \int_a^b P_1(t)dt = \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}.$$

8.3.2. *Formule composite*

En généralisant le même principe aux $(n+1)$ points équidistants précédents, on obtient

$$\begin{aligned} I_T &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(t)dt = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(f(x_i)+f(x_{i+1}))}{2} \\ &= \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{2}(f(a) + \frac{1}{2} f(b)) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]. \end{aligned}$$

On utilise usuellement la dernière formule plus économique en nombre d'opérations arithmétiques.

8.4. Méthode de Simpson

8.4.1. *Formule simple*

On suppose connue f aux trois points équidistants de $[a, b]$

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2} = a+h, \quad x_2 = a+2h,$$

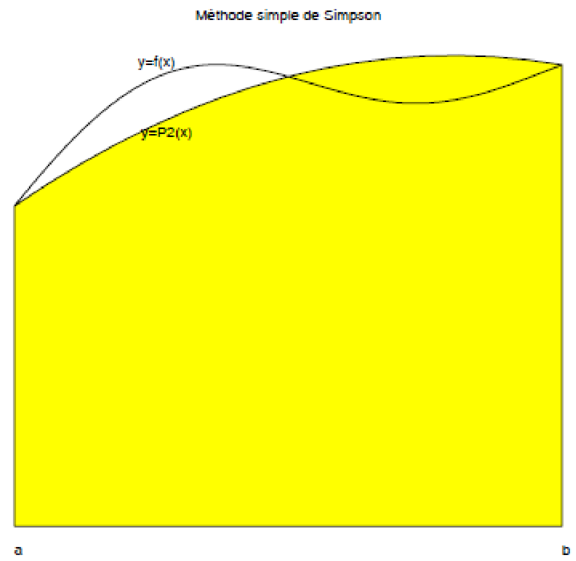
le pas est $h = (b-a)/2$. Alors

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{2h^2} f(a) \\ &+ \frac{(x-a)(x-b)}{h^2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &+ \frac{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{h^2} f(b), \end{aligned}$$

et après intégration, on obtient

$$\left\| I_2 = \int_a^b P_2(t)dt = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]. \right.$$

C'est la formule simple dite de Simpson.



8.4.2. *Formule composite*

On réitère la formule précédente en partageant l'intervalle $[a, b]$ en

$$s = \frac{n}{2}$$

intervalles $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, centrés en x_{2i+1}, de longueur

$$2h = \frac{b-a}{s} = \frac{2(b-a)}{n}$$

pour $i = 0, 1, 2, ..., s-1$; on obtient, d'abord sur $[x_{2i}, x_{2i+2}]$,

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} P_2(t)dt = \frac{h}{3}\left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right],$$

et ensuite, la formule composite de Simpson

$$\left\| \begin{aligned} I_S &= \sum_{i=0}^{s-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} P_2(t)dtt \\ &= \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{s-1} f(a+2ih) + 4\sum_{i=0}^{s-1} f(a+(2i+1)h)\right]. \end{aligned} \right.$$

8.5. Gestion d'erreur

On se bornera à l'étude de l'erreur mathématique commise dans la méthode des trapèzes et celle de Simpson.

8.5.1. *Erreur dans la méthode des trapèzes*

En formule simple on a vu que la quantité

$$I_1 = \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}$$

approche

$$I = \int_a^b f(t)dt.$$

En posant $b = a + h$, il vient

$$\varphi(h) = I - I_1 = \int_a^{a+h} f(t)dt - \frac{h(f(a)+f(a+h))}{2}.$$

En supposant ensuite que f admet des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre 2, on montre, grâce à un développement de Taylor de $\varphi(h)$ à l'ordre 2 qu'on a

$$|I - I_1| \leqslant \frac{h^3}{12} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| .$$

En formule composite, on déduit que

$$|I - I_T| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| .$$

8.5.2. *Erreur dans la méthode de Simpson*

Utilisant la méthode précédente on trouve l'estimation de l'erreur suivante, en composite, pour des fonctions f admettant des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre 4

$$|I - I_S| \leqslant \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right| .$$

Lorsqu'on connait une majoration M de $\left|f^{(4)}(x)\right|$, le pas choisi h qui permet d'avoir au plus une erreur ε vérifie nécéssairement

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} M \leqslant \varepsilon,$$

d'où

$$\frac{(b-a)}{180} h^4.M \leqslant \varepsilon,$$

ou bien

$$h \leqslant \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M}}.$$

Le pas h est en $O\left(\varepsilon^{1/4}\right)$.

Si on veut éviter d'utiliser une majoration de $\left|f^{(4)}(x)\right|$, on effectue les approximations I_S^h et $I_S^{h/2}$ de I de pas respectifs h et $h/2$. La deuxième est peu coûteuse, puisqu'elle utilise certaines valeurs déjà calculées. On réitèrera les calculs, en remplaçant h par $h/2$, et en effectuant le test d'arrêt

$$\left|I_S^h - I_S^{h/2}\right| < \varepsilon.$$